Q1 Sejam A e B dois eventos tais que $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ e $P(A|B) = 1/4$. Diga, se as afirmativas abaixo são falsas ou verdadeiras e justifique.

i) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos

Como $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(A|B)} = \dfrac{1}{2}$

e $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \dfrac{1}{8}$

os eventos A e B não são mutuamente exclusivos.

$\Rightarrow$ Falsa

ii) O evento A está contido em B, ou seja, $A \subset B$.

Se $A \subset B$ deveríamos ter $P(A|B) = 1$, mas na verdade tem-se

$P(A|B) = \dfrac{1}{4}$ $\rightarrow$ Então $A \not\subset B$.

$\rightarrow$ Falsa

iii) Os eventos A e B são estatisticamente independentes

Como $P(A|B) = P(A) = 1/4$ e $P(B|A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$

Os eventos A e B são estatisticamente independentes

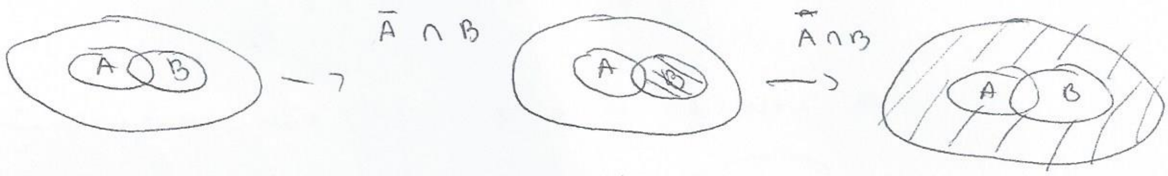
$\rightarrow$ Verdadeira

iv) $P(B) = 3/4$

$$P(B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(A|B)} = 1/2$$

Logo, a afirmação é falsa

v) $P(\bar{A}|\bar{B}) = 3/4$



$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))}{1/2}$$

$= 3/4$

Verdadeira

Q 2 Considere uma v.a. contínua com fdp dada por

$$f_x(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que k é uma constante

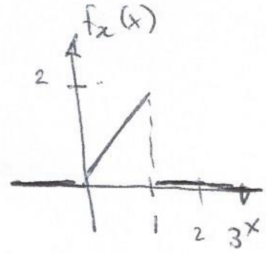
a) Determine o valor de k e esboce $f_x(x)$.

Sabe-se que $f_x(x) \geq 0$ e que $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1$

Logo, tem-se

$$\int_0^1 kx\,dx = \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{k=2}$$

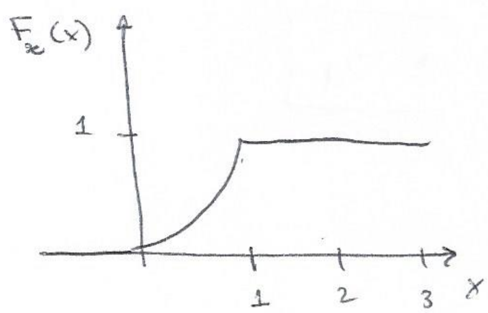
$$f_x(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$



b) Determine a FDP $F_x(x)$ e esboce-a

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha$$

$$F_x(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha}_{2\alpha} + \underbrace{\int_{1}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha}_{0}$$



$$= \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \int_0^x 2\alpha\,d\alpha = x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 2\alpha\,d\alpha = 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

c) calcule

$$P(1/4 < x \leq 2) = F_x(2) - F_x(1/4)$$

$$= 1 - (1/4)^2 = 15/16$$

d) Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-x^2+x-a)} \quad , -\infty < x < \infty$$

Encontre o valor de a tal que f(x) seja a fdp de uma v.a. contínua X.

Manipulando-se f(x) obtém-se

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-x^2+x-a)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2+x+1/4+a-1/4)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1/2)^2} \cdot e^{-(a-1/4)}$$

Se f(x) é uma fdp então, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = e^{-(a-1/4)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1/2)^2} dx}_{1}$$

Logo, $e^{-(a-1/4)} = 1$

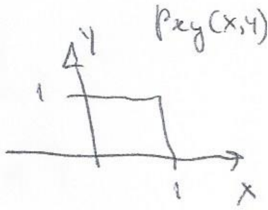
$$\ln\left(e^{-(a-1/4)}\right) = 0$$

$$a - 1/4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/4}$$

Q3 A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias x e y é descrita por

$$p_{xy}(x,y) = \begin{cases} c\,x\,y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que c é uma constante.



a) Determine o valor de c

Usando $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c\,x\,y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 c\,x\,y\,dx\,dy$$

$$= c\int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy$$

$$= \frac{1}{2}c\int_0^1 y\,dy$$

$$= \frac{1}{4}c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

b) As variáveis aleatórias x e y são independentes? Explique

Para determinar se x e y são independentes, deve-se calcular as fdps marginais.

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x,v)\,dv = \int_0^1 4xv\,dv = 4x\int_0^1 v\,dv = 4x\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = 2x$$

Logo, tem-se $p_x(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

De maneira análoga, tem-se

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(\alpha,y)\,d\alpha = 4y\int_0^1 \alpha\,d\alpha = 2y$$

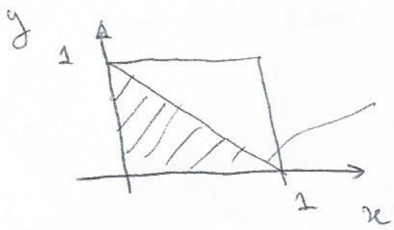
Logo, tem-se $p_y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Como $p_{xy}(x,y) = p_x(x)\cdot p_y(y) = 2x\cdot 2y = 4xy$, x e y são est. ind.

c) Calcule $P(x+y<1)$

A região do plano correspondente ao evento $(x+y<1)$

é mostrada abaixo



$y = 1 - x$, ou , $x = 1 - y$

A prob é calculada por

$$P(x+y<1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} 4xy \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 4y \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1-y} dy = \int_0^1 4y \frac{(1-y)^2}{2} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{4y\,(1-2y+y^2)}{2} dy = \int_0^1 \frac{4y^3 - 8y^2 + 4y}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2} y^4\Big|_0^1 - \frac{4}{3} y^3\Big|_0^1 + y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9-8}{6} = \frac{1}{6}$$